

## Capítulo 5

# Incerteza do Tempo de Chegada - *Jitter*

### 5.1- Introdução

Os sistemas de transmissão baseados em solitões ópticos são um tipo de transmissão digital em que impulsos de luz modulados, de acordo com a informação que se pretende transmitir, são enviados através de um meio de comunicação óptico, tipicamente composto por uma série de fibras ópticas, intercaladas por amplificadores e dispositivos de controlo, sendo posteriormente detectados e recuperada a informação.

Uma das limitações ao aumento da capacidade dos sistemas baseados em solitões ópticos, está relacionada com a incerteza do tempo de chegada dos impulsos. Diversas causas fazem com que o tempo de propagação dos impulsos não seja constante, mas varie aleatoriamente de impulso para impulso. A tolerância dos sistemas à variação do tempo de chegada dos impulsos é limitada, sendo usualmente especificada como uma percentagem do período do bit e estando relacionada com a probabilidade de erro dos sistemas de transmissão.

Na secção 5.2, iremos enquadrar o problema do *jitter* em sistemas de transmissão IM-DD ópticos, salientando as possíveis causas da introdução de *jitter* e as consequentes limitações à capacidade dos sistemas por este imposto.

Na secção 5.3, iremos abordar o problema do *jitter* em sistemas de transmissão baseados em solitões ópticos. Nestes sistemas o *jitter* apresenta uma componente importante devida à transmissão não linear, que iremos analisar salientando as suas origens físicas.

Na secção 5.4, apresentaremos um novo modelo para o *jitter* em sistemas baseados em solitões, tendo em consideração as principais fontes de *jitter* devido à transmissão não linear, para os sistemas estudados no âmbito desta tese, ou seja o efeito de Gordon-Haus e a interacção entre solitões.

## 5.2 - Problema do *jitter* em sistemas IM-DD ópticos

Num sistema de transmissão óptico IM-DD ideal, o tempo de chegada dos impulsos estaria espaçado por múltiplos inteiros do período do bit. No entanto em sistemas reais o tempo de chegada dos impulsos vai sofrer pequenas variações aleatórias, que designaremos por *jitter*.

As principais causas do *jitter* são distorções aleatórias introduzidas durante a propagação no sinal óptico e imperfeições nos circuitos de geração e extracção do sinal de relógio. Podemos dividir as origens do *jitter* em duas grandes classes, uma englobando os fenómenos comuns a todos os sistemas IM-DD ópticos e outra específica dos sistemas de transmissão baseados em solitões. Nesta secção iremos enquadrar o *jitter* em termos de sistemas IM-DD ópticos.

Na secção 4.8 verificámos como é que imperfeições no circuito que gera o sinal de relógio dão origem a *jitter* no domínio óptico. O *jitter* que medimos à saída do nosso emissor de solitões, e que é, em grande medida, devido a imperfeições no circuito oscilador que gera o sinal de relógio e ao ruído do laser semiconductor, vai originar uma incerteza no tempo de chegada dos impulsos, fazendo com que o receptor tenha mais dificuldade em

operar no instante de decisão óptimo para todos os impulsos, degradando assim o desempenho dos sistemas de transmissão.

Os actuais receptores ópticos têm um circuito de extracção de relógio, que vai retirar um sinal de sincronismo da sequência de impulsos, de modo a sincronizar o instante de decisão do receptor com o instante mais favorável. O processo de extracção do sinal de sincronismo é complexo e vai ser perturbado pelo facto da sequência de impulsos não ser ideal. As distorções aleatórias sofridas pela sequência de impulsos durante a transmissão e detecção, assim como as imperfeições do circuito de extracção do relógio vão introduzir o chamado *jitter* do sinal de relógio [1, 2].

Em sistemas de transmissão digital a sequência de impulsos é, geralmente, o resultado da multiplexagem de várias sequências de impulsos com ritmos de transmissão mais baixos. Estes processo de agrupamento de sequências de menor ritmo de transmissão é chamado de multiplexagem temporal. A multiplexagem temporal envolve a sincronização de um conjunto de sinais de entrada, com ritmos de transmissão eventualmente diferentes, com um sinal de saída resultante do agrupamento dos vários sinais de entrada. No receptor é efectuado o processo inverso, ou seja é desmultiplexado o sinal de modo a serem recuperados os sinais de menor ritmo de transmissão. Os processos de multiplexagem e desmultiplexagem envolvem circuitos de extracção de relógio e circuitos de sincronização que podem introduzir *jitter* no sistema [1].

A acumulação do *jitter* em redes de transmissão IM-DD ópticas tem assumido progressivamente um papel cada vez mais relevante. Este progressivo aumento da importância do *jitter* no desempenho dos sistemas está relacionado com o aumento dos ritmos de transmissão usados, e mais recentemente, com o advento da chamada camada de transporte óptica, em que funções tradicionalmente efectuadas no domínio eléctrico são transferidas para o domínio óptico [3].

### **5.3 - *Jitter* devido à transmissão não linear**

O problema do *jitter* em sistemas de transmissão lineares tem sido intensamente estudado, no entanto o aparecimento de sistemas de transmissão ópticos em que os efeitos

não lineares assumem um papel relevante veio levantar novas questões no âmbito da caracterização do *jitter*.

Nesta secção iremos analisar as principais causas da introdução de *jitter*, em sistemas baseados em solitões. Especial atenção será dada ao efeito Gordon-Haus, secção 5.3.1, e à interacção entre solitões, secção 5.3.2, pela sua relevância no desempenho dos sistemas estudados no âmbito desta tese. Serão ainda abordados, na secção 5.3.3, o problema do *jitter* devido à PMD, aos campos acústicos, ao ruído de fase e *chirp* do laser, ao efeito de Raman, aos desvios temporais induzidos pelo ruído de emissão espontânea e ao coeficiente de dispersão de terceira ordem.

### **5.3.1 - Efeito de Gordon-Haus**

Conforme foi referido anteriormente, os amplificadores ópticos adicionam ruído de emissão espontânea à sequência de impulsos. O ruído introduzido pelos amplificadores ópticos vai perturbar a amplitude, a fase, a posição temporal e a frequência central dos solitões. As perturbações na frequência central dos impulsos originam variações na velocidade de propagação dos solitões, introduzindo *jitter* no sistema.

Este efeito foi inicialmente estudado por J. P. Gordon e H. A. Haus [4], e é conhecido como o efeito de Gordon-Haus. De acordo com o que referimos no capítulo 3, o ruído de emissão espontânea provoca um desvio na frequência central do solitão, que pode ser caracterizado, à saída do amplificador óptico, por uma distribuição gaussiana com média nula e variância dada por (3.23).

Considerando a ausência de perturbações externas, chegamos à conclusão por integração directa da equação (3.15) que um desvio  $\delta\omega_s$  na frequência angular central normalizada do impulso do tipo solitão à saída de um amplificador se traduz, devido à dispersão da velocidade de grupo, em termos temporais num atraso normalizado dado por  $\delta\omega_s \xi_a$  à entrada do amplificador seguinte, em que  $\xi_a$  é a distância normalizada entre amplificadores.

Supondo um sistema composto por um conjunto de troços de fibra, de comprimento  $\xi_a$ , intercalados por  $N_a$  amplificadores, conforme pode ser observado na

figura 3.3(b), temos que o desvio temporal à entrada do receptor será dado pelo somatório dos desvios parciais, ou seja à entrada do receptor o desvio temporal normalizado induzido pelo desvio de frequência normalizado resultante do ruído de emissão espontânea adicionado pelo primeiro amplificador será dado por

$$\delta\tau_{d,1} = -N_a \cdot \xi_a \cdot \delta\omega_1 \quad (5.1)$$

onde  $\delta\omega_1$  é o desvio normalizado da frequência angular à saída do primeiro amplificador.

De modo análogo o desvio induzido pelo segundo amplificador será dado por

$$\delta\tau_{d,2} = -(N_a - 1) \cdot \xi_a \cdot \delta\omega_2 \quad (5.2)$$

onde  $\delta\omega_2$  é o desvio normalizado da frequência angular imposto pelo segundo amplificador, que é estatisticamente independente do desvio induzido pelo primeiro amplificador.

Repetindo o processo para todos os amplificadores, chegamos à conclusão que o desvio acumulado, ou seja o somatório dos desvios temporais normalizados induzidos por todos os amplificadores, é dado por

$$\delta\tau_d = \sum_{j=1}^{N_a} \delta\tau_{d,j} = -\xi_a \cdot \left\{ N_a \cdot \delta\omega_1 + (N_a - 1) \cdot \delta\omega_2 + \dots + \delta\omega_{N_a} \right\} = -\xi_a \cdot \sum_{p=1}^{N_a} \sum_{j=1}^p \delta\omega_j \quad (5.3)$$

onde  $\delta\omega_j$  é desvio normalizado da frequência angular imposto pelo amplificador  $j$ . De (5.3) podemos calcular a variância do desvio temporal normalizado à entrada do receptor, obtendo-se

$$\sigma_{GH,\delta\tau_d}^2 = \xi_a^2 \cdot \left\{ N_a^2 \cdot \sigma_{\omega_s}^2 + (N_a - 1)^2 \cdot \sigma_{\omega_s}^2 + \dots + \sigma_{\omega_s}^2 \right\} = \xi_a^2 \cdot \sigma_{\omega_s}^2 \cdot \sum_{j=1}^{N_a} j^2 \quad (5.4)$$

em que  $\sigma_{\omega_s}^2$  é dado por (3.23). No cálculo de (5.4) foi tida em consideração a independência estatística dos desvios de frequência impostos pelos vários amplificadores, assim como os resultados apresentados na secção 3.3.2.

Considerando que o número de amplificadores é suficientemente elevado para ser válida a aproximação

$$\sum_{i=1}^{N_a} j^2 \approx \int_0^{N_a} j^2 dj = \frac{N_a^3}{3} \quad (5.5)$$

obtemos de (5.4) e (5.5)

$$\sigma_{\text{GH},\delta\tau_d}^2 = \frac{N_a^3 \cdot \xi_a^2 \cdot \sigma_{\omega_s}^2}{3} \quad (5.6)$$

Desnormalizando a expressão (5.6) e substituindo  $\sigma_{\omega_s}^2$  por (3.23), obtemos para a variância do *jitter* a expressão seguinte

$$\sigma_{\text{GH}}^2 = \frac{n_{\text{sp}} \cdot n_2^1 \cdot D \cdot h \cdot (G-1) \cdot L_T^3}{9 \cdot T_0 \cdot A_{\text{eff}} \cdot L_a \cdot Q} \quad (5.7)$$

onde  $n_{\text{sp}}$  é o factor de emissão espontânea dos amplificadores ópticos,  $n_2$  é o parâmetro não linear da fibra óptica,  $D$  é a dispersão cromática da fibra,  $h$  é a constante de Planck,  $G$  é o ganho dos amplificadores,  $L_T$  é o comprimento total do sistema,  $T_0$  é a largura temporal dos solitões,  $A_{\text{eff}}$  é à área efectiva da fibra,  $L_a$  é o espaçamento entre amplificadores e  $Q$  é o factor de incremento da potência óptica dado pela expressão (4.4).

Devemos ainda ter em consideração que a expressão (5.6) dá-nos a variância do desvio temporal normalizado, ou seja o resultado da expressão (5.6) é uma grandeza adimensional, enquanto a expressão (5.7) dá-nos a variância do desvio temporal em unidades de tempo, usualmente em picosegundos ao quadrado.

Em resumo, podemos afirmar que o *jitter* devido ao efeito de Gordon-Haus tem uma distribuição gaussiana e apresenta uma variância proporcional ao cubo da distância total do sistema, expressão (5.7). Notemos que a robustez dos impulsos do tipo solitão são a origem do efeito Gordon-Haus, ou seja o solitão incorpora o ruído de emissão espontânea auto ajustando a sua frequência central. Atendendo ao carácter aleatório dos desvios de frequência induzidos e à dispersão da velocidade de grupo, o tempo de propagação dos solitões assume também uma natureza aleatória, que pode ser caracterizada, após uma sequência de  $N_a$  amplificadores, por uma distribuição gaussiana com variância dada por (5.7).

### 5.3.2 - Novo modelo para a interacção entre solitões

Conforme observámos no capítulo 3 o solitão aparece como uma solução da equação não linear de Schrödinger, no entanto isto só é verdade para um impulso isolado. Num sistema de telecomunicações real estamos interessados em transmitir uma sequência de impulsos. Nesta secção vamos analisar em que medida é que a presença de outros impulsos vai perturbar a propagação do solitão.

Começaremos por analisar o caso de dois solitões, que é um problema tratado na literatura especializada, e baseados neste resultado vamos derivar um novo modelo para o caso que nos interessa, que é a dinâmica duma sequência aleatória de solitões.

#### 5.3.2.1 - Caso de dois solitões

O caso de dois solitões foi inicialmente estudado por Karpman e Solov'ev [5]. Posteriormente, e seguindo um método alternativo J. P. Gordon [6], chegou à mesma solução. Ambos os resultados são baseadas na resolução aproximada da equação não linear de Schrödinger e a solução encontrada foi a seguinte

$$U(\xi, \tau) = u_1 \cdot \operatorname{sech}[u_1 \cdot (\tau - q)] \cdot \exp(i \cdot \phi_1) + u_2 \cdot \operatorname{sech}[u_2 \cdot (\tau + q)] \cdot \exp(i \cdot \phi_2) \quad (5.8)$$

em que a separação normalizada entre solitões é  $2q$ , a amplitude e fase de cada um dos impulsos é  $u_1$ ,  $\phi_1$  e  $u_2$ ,  $\phi_2$ , respectivamente, sendo  $q$ ,  $u_1$ ,  $\phi_1$ ,  $u_2$  e  $\phi_2$  função da variável espacial  $\xi$ .

Notemos que no caso do solitão representado pela primeira parcela do membro do lado direita da equação (5.8), o parâmetro  $q$  tem exactamente o mesmo significado que o deslocamento temporal normalizado  $\tau_s$ , introduzido na expressão (3.11), enquanto na segunda parcela  $q$  é igual ao inverso do deslocamento temporal normalizado do respectivo solitão. Nesta secção optamos por usar, no primeiro solitão,  $q$  em vez de  $\tau_1$  e no segundo solitão  $q$  em vez de  $-\tau_2$  para evidenciar a simetria do deslocamento temporal dos solitões, e porque esta notação é frequentemente usada no estudo do problema da interacção entre solitões pois simplifica o formalismo do tratamento analítico.

No trabalho [6], J. P. Gordon, mostra que no caso de dois solitões, com amplitudes idênticas, a separação normalizada entre os solitões e a diferença de fase são governadas pelo seguinte par de equações diferenciais acopladas

$$\frac{\partial^2 q}{\partial \xi^2} = -4 \cdot \exp(-2 \cdot q) \cdot \cos(2 \cdot \psi) \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} = 4 \cdot \exp(-2 \cdot q) \cdot \sin(2 \cdot \psi) \quad (5.10)$$

em que  $\psi$  é a diferença de fase e é dado por  $(\phi_2 - \phi_1) / 2$ .

Notemos que para simplificar a escrita estamos a designar  $q$  e  $\psi$  como sendo, respectivamente a separação normalizada e a diferença de fase entre os solitões, quando em rigor  $q$  é metade da separação normalizada e  $\psi$  é metade da diferença de fase entre solitões.

A equação (5.9) mostra que a dinâmica, em termos de separação temporal, de um par de solitões é dominada por forças de interacção que dependem exponencialmente da sua separação e sinusoidalmente da diferença de fase.

As equações (5.9) e (5.10) são directamente integráveis, ver apêndice C, e admitindo que  $q_0$  e  $\psi_0$  são a separação e diferença de fase inicial, respectivamente, obtemos a expressão seguinte para  $q$  e  $\psi$  durante a propagação

$$q(\xi) = q_0 + \frac{1}{2} \cdot \ln \left[ \frac{\cosh[4 \cdot \exp(-q_0) \cdot \sin(\psi_0) \cdot \xi] + \cos[4 \cdot \exp(-q_0) \cdot \cos(\psi_0) \cdot \xi]}{2} \right] \quad (5.11)$$

$$\psi(\xi) = \psi_0 + \frac{1}{2 \cdot i} \cdot \ln \left[ \frac{\cos[2 \cdot \exp(-q_0) \cdot \exp(-i \cdot \psi_0) \cdot \xi]}{\cos[2 \cdot \exp(-q_0) \cdot \exp(i \cdot \psi_0) \cdot \xi]} \right] \quad (5.12)$$

Em resumo podemos afirmar que, no caso de dois solitões, a sobreposição das caudas dos solitões, dá origem a forças de interacção entre eles, que dependem da separação temporal e diferença de fase, fazendo com que a separação normalizada entre



solitões, seja uma função da variável espacial  $\xi$ , da separação temporal e diferença de fase inicial.

Na figura 5.1 mostramos a separação normalizada entre dois solitões em função da distância de propagação, expressão (5.11), para diferentes diferenças de fase iniciais  $\psi_0$  e para uma separação temporal normalizada inicial de 3.5.

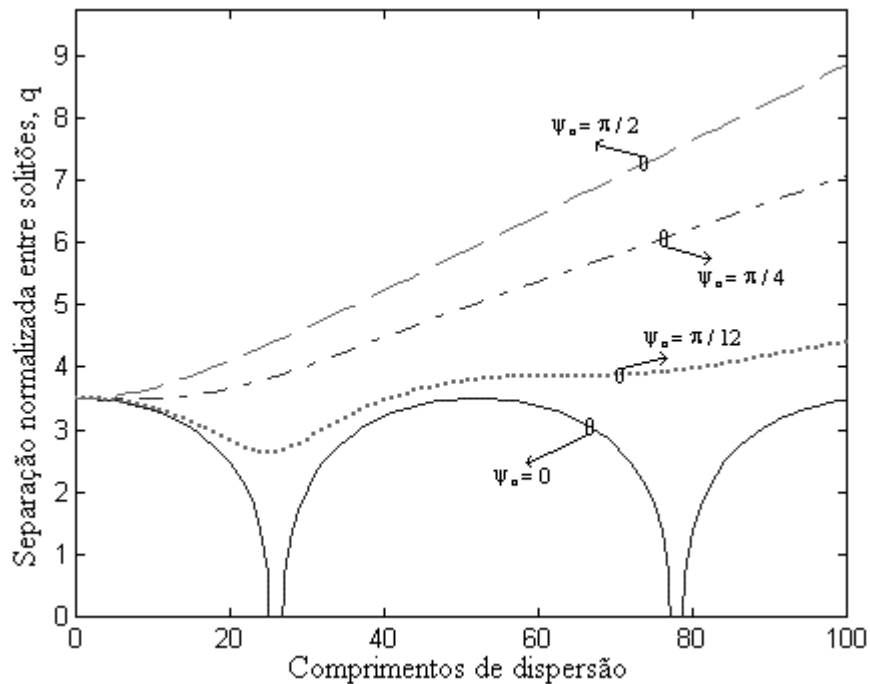


Figura 5.1 - Separação normalizada entre dois solitões em função do comprimento de dispersão e para diferentes diferenças de fase inicial. A separação temporal normalizada inicial é de 3.5.

Notemos que o sentido das forças, ou seja se são de atracção ou repulsão, depende da diferença de fase inicial dos solitões.

Como uma diferença de fase nula entre solitões vizinhos origina o pior caso, e é a situação mais comum em sistemas de comunicação ópticos baseados em solitões, vamos centrar a nossa atenção neste caso.

Colocando  $\psi_0$  igual a zero, na equação (5.11), e após alguma manipulação algébrica obtemos a expressão seguinte para a separação temporal normalizada entre dois solitões em fase

$$q = q_0 + \ln[\cos(a \cdot \zeta)] \quad (5.13)$$

onde  $a = 2 \exp(-q_0)$ .

Os resultados apresentados nesta secção são apenas válidos para o caso de dois solitões. No entanto, com base nestes resultados iremos derivar um novo modelo para a dinâmica da interacção entre solitões numa sequência aleatória. Para isso vamos começar por analisar o caso de três solitões, seguindo para o caso de quatro e finalmente generalizando para uma qualquer sequência.

Como comentário final ao caso de dois solitões, gostaríamos de referir que no trabalho [7], T. Georges deduz a mesma expressão obtida por J. P. Gordon usando a teoria das perturbações adiabáticas, apresentada na secção 3.2.2, em que o termo relativo à perturbação que actua sobre o solitão cuja a amplitude é  $u_1$  é obtido do termo relativo ao efeito de Kerr,  $|u_1 + u_2|^2 \cdot (u_1 + u_2)$ , considerando, para além do termo relativo ao SPM,  $|u_1|^2 \cdot u_1$ , apenas os termos de primeira ordem em relação ao segundo solitão, ou seja considerando a perturbação

$$\varepsilon \cdot P(u_1) = -2 \cdot |u_1|^2 \cdot u_2 - u_1^2 \cdot u_2^* \quad (5.14)$$

### 5.3.2.2 - Caso de três solitões

De modo a estender o resultado anterior ao caso de três solitões, vamos analisar o conjunto de forças que actua sobre cada impulso num sistema de três solitões, tendo em consideração que as forças de interacção decrescem exponencialmente com a separação temporal e dependem da diferença de fase.

Num sistema de três solitões, onde as distâncias e diferenças de fase relativas entre os solitões externos, A e C na figura. 5.2, e o solitão central B são iguais, as forças de interacção que actua sobre o solitão B anulam-se mutuamente, sendo assim o solitão B permanece fixo.

Na figura 5.2 representamos vectorialmente as forças que estão a actuar sobre cada um dos solitões. Devemos notar que estamos a usar o conceito de força, de modo análogo ao usada na mecânica clássica, duma forma algo abusiva. Porém esta é uma prática comum no tratamento do problema da interacção entre solitões e permite simplificar alguns dos conceitos envolvidos.

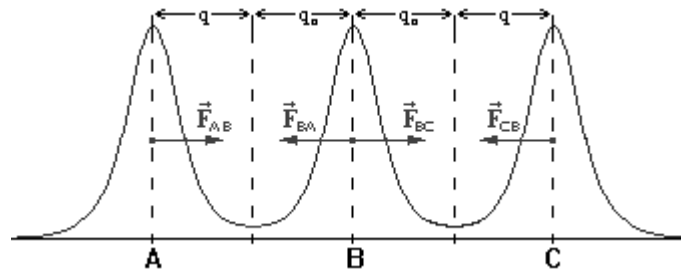


Figura 5.2 - No caso de três solitões, em que as distâncias e diferenças de fase relativas entre os solitões externos e o solitão central são iguais, as forças de interacção sobre o solitão B compensam-se mutuamente.

No caso de dois solitões a separação entre solitões é dada por  $2 \cdot q$ . No entanto no caso de três solitões, porque o solitão central está fixo, notemos que a força resultante que actua sobre o solitão B, na figura 5.2, é nula, a separação entre o solitão central e os solitões laterais é dada por  $q_0 + q$ , onde  $q_0$  é a separação inicial.

Introduzindo este dado nas equações (5.9) e (5.10), ou seja substituindo a separação entre solitões, que no caso de dois solitões é dada por  $2 \cdot q$  por  $q_0 + q$ , obtemos o seguinte par de equações diferenciais acopladas para a dinâmica do solitão externo no caso de três solitões. Notemos que o solitão central permanece fixo.

$$\frac{\partial^2 q}{\partial \xi^2} = -2 \cdot a \cdot \exp(-q) \cdot \cos(2 \cdot \psi) \tag{5.15}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} = 2 \cdot a \cdot \exp(-q) \cdot \sin(2 \cdot \psi) \tag{5.16}$$

Resolvendo as equações (5.15) e (5.16) para o caso de solitões em fase, ver apêndice C, chegamos à seguinte expressão para a separação normalizada entre os solitões laterais e o solitão central num sistema de três solitões em fase

$$q = q_0 + \ln \left[ \cos^2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot a \cdot \xi \right) \right] \quad (5.17)$$

Comparando (5.17) com a correspondente solução para o caso de dois solitões (5.13), observamos que para além do quadrado na função coseno, no caso de três solitões o período é  $\sqrt{2}$  vezes superior, comparativamente ao caso de dois solitões. Isto significa que as forças de interacção são mais críticas no caso de dois solitões do que no caso de três solitões, pois a colisão entre solitões dá-se mais cedo no caso de dois solitões.

Testámos a validade do nosso resultado analítico resolvendo numericamente a equação não linear de Schrödinger para o caso de dois e três solitões. Os resultados são apresentados na figura 5.3. Como podemos observar os resultados numéricos estão em concordância com os resultados analíticos.

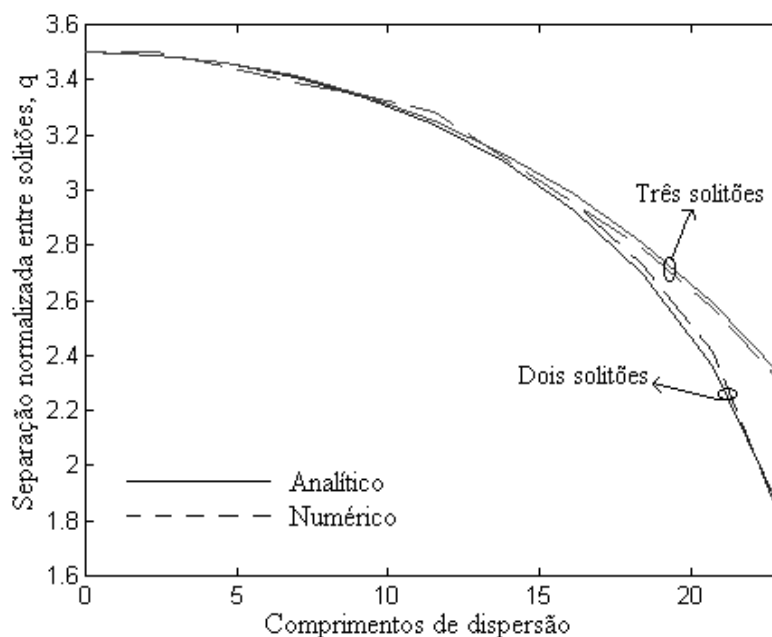


Figura 5.3 - Distância normalizada entre solitões. As curvas a cheio são os resultados analíticos, as curvas a tracejado são os resultados numéricos obtidos resolvendo a equação não linear de Schrödinger.

### 5.3.2.3 - Numa sequência aleatória

De modo a generalizar os resultados obtidos nas secções 5.3.2.1 e 5.3.2.2 para uma sequência aleatória de impulsos, vamos começar por analisar o caso de quatro solitões.

Num sistema de quatro solitões em fase onde os dois solitões centrais, B e C na figura 5.4, estão rodeados por impulsos exercendo forças de interacção opostas, estes permanecem praticamente fixos. Sem grande perda de rigor podemos assumir que os solitões centrais estão fixos e os solitões laterais, A e D, comportam-se de um modo similar ao sistema de três solitões.

Mostramos na figura 5.4, o conjunto de forças que actuam sobre cada impulso. Atendendo à diminuição exponencial das forças de interacção com a separação entre solitões, a força exercida no solitão B por D e em C por A, pode ser desprezável relativamente às forças exercidas pelos solitões adjacentes.

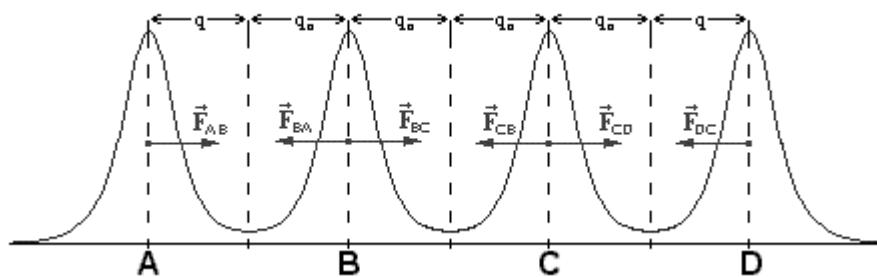


Figura 5.4 - No caso de quatro solitões os solitões centrais (B e C) estão praticamente fixos, porque cada um deles está rodeado por impulsos que exercem forças de interacção opostas.

Obtivemos assim um modelo para a dinâmica de quatro solitões tendo por base o resultado anteriormente obtido para o caso de três solitões.

É obvio que este resultado pode ser estendido para o caso de mais do que quatro solitões. Numa longa sequência de impulsos, os únicos que sofrem desvios substanciais devido às forças de interacção são o primeiro e o último. Deste modo qualquer sequência de solitões pode ser reduzida aos casos anteriores. Recordemos que estamos a considerar apenas as forças de interacção originadas por solitões adjacentes, porém atendendo à diminuição exponencial das forças de interacção com a separação, tal revela-se usualmente uma boa aproximação em sistemas de comunicação ópticos baseados em solitões.

Em sistemas de comunicação ópticos a sequência de impulsos é aleatória, contendo longas sequências de impulsos mas também impulsos isolados e pares de impulsos. Para

analisar o caso de uma sequência longa podemos dividi-la em pequenas sequências de modo a reduzi-la aos casos estudados anteriormente.

Na figura 5.5 temos uma sequência de 12 períodos que podemos reduzir ao caso de um solitão isolado H, pares de solitões A e B, K e L e três solitões D, E e F.

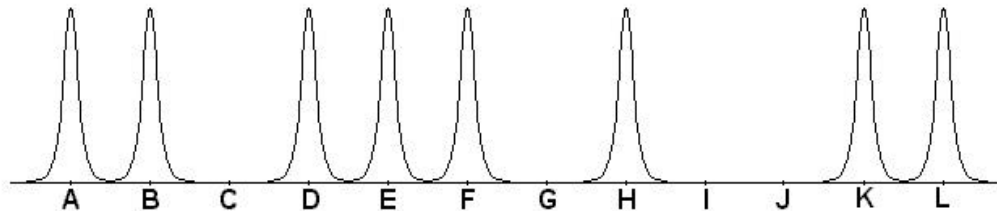


Figura 5.5 - De modo a analisar o problema da interação entre solitões, numa sequência longa, podemos dividir a sequência em pequenos troços de modo a que possam ser analisados com base nos casos anteriores.

De modo a generalizarmos o nosso resultado, para uma sequência longa aleatória, vamos considerar uma sequência pseudo aleatória com  $2^m-1$  bits que contém todas as possíveis combinações de  $m$  bits, à excepção da sequência nula [8].

Se o valor de  $m$  for suficientemente grande, ou seja se  $m$  for maior ou igual a 5, verifica-se que o número de combinações possíveis para os quatro bits vizinhos daquele que estamos a considerar é tal que podemos encontrar sempre com igual probabilidade cada uma das combinações da tabela 5.1.

Combinações	bit a considerar				
	-	-	-	-	-
1	"0"	"0"	"1"	"0"	"0"
2	"0"	"0"	"1"	"0"	"1"
3	"0"	"0"	"1"	"1"	"0"
4	"0"	"0"	"1"	"1"	"1"
5	"0"	"1"	"1"	"0"	"0"
6	"0"	"1"	"1"	"0"	"1"
7	"0"	"1"	"1"	"1"	"0"
8	"0"	"1"	"1"	"1"	"1"
9	"1"	"0"	"1"	"0"	"0"
10	"1"	"0"	"1"	"0"	"1"
11	"1"	"0"	"1"	"1"	"0"
12	"1"	"0"	"1"	"1"	"1"
13	"1"	"1"	"1"	"0"	"0"
14	"1"	"1"	"1"	"0"	"1"
15	"1"	"1"	"1"	"1"	"0"
16	"1"	"1"	"1"	"1"	"1"

Tabela 5.1 - Diversas combinações possíveis para os quatro impulsos vizinhos do solitão que estamos a considerar.

Atendendo que as combinações 1, 2, 7, 8, 9, 10, 15 e 16 conduzem a um desvio nulo, que 5 e 6 conduzem a um avanço dado por (5.13), 3 e 11 a um atraso dado por (5.13), que 13 e 14 conduzem a um avanço dado por (5.17), 4 e 12 a um atraso dado por (5.17), temos que o tempo de chegada é representada por um gráfico de barras com 50% dos solitões a não apresentarem qualquer desvio, 25% a apresentarem o desvio correspondente ao caso de dois solitões e 25% com um desvio dado pelo caso de três solitões. Para além disso, como o desvio pode ser positivo ou negativo, ou seja pode representar um avanço ou um atraso, os 25% correspondentes ao caso de dois e três solitões são divididos em 12.5% apresentando um desvio positivo e 12.5% apresentando um desvio negativo. Podemos então escrever a função densidade de probabilidade resultante na forma seguinte [9]

$$p(t) = \frac{1}{2} \delta(t) + \frac{1}{8} \delta(t - t_2) + \frac{1}{8} \delta(t + t_2) + \frac{1}{8} \delta(t - t_3) + \frac{1}{8} \delta(t + t_3) \quad (5.18)$$

Onde os valores para  $t_2$  e  $t_3$  são obtidos das expressões (5.13) e (5.17), e são dados por

$$t_2 = -T_0 \cdot \ln \left\{ \cos \left( a \cdot \frac{L_T}{L_D} \right) \right\} \quad (5.19)$$

$$t_3 = -T_0 \cdot \ln \left\{ \cos^2 \left( \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{L_T}{L_D} \right) \right\} \quad (5.20)$$

e representam, respectivamente, o desvio temporal devido a interacção num sistema de dois e três solitões.

Este resultado descreve a dinâmica duma sequência infinita e aleatória de solitões, e foi inicialmente apresentado por nós no trabalho [9]. Notemos que a única condição que foi imposta na derivação deste resultado, foi que a probabilidade de ocorrência de cada uma das combinações da tabela 5.2 fosse a mesma. Numa sequência aleatória de símbolos, gerados por uma fonte de informação que garanta que os símbolos são equiprováveis e que a sua probabilidade de ocorrência é independente dos símbolos anteriores, tal verifica-se, desde que a sequência de símbolos seja suficientemente longa.

### 5.3.2.4 - Validação do novo modelo para a interacção entre solitões

Com o objectivo de comprovarmos a validade do novo modelo, para a interacção entre solitões, simulámos um sistema de transmissão a operar a 10 Gbit/s, com comprimento total de 800 km. Os parâmetros do sistema estão especificados na tabela 5.2.

Ritmo de transmissão ( $B_r$ )	10 Gbit/s
Largura dos impulsos ( $T_0$ )	20.0 ps
Comprimento de onda ( $\lambda$ )	1.55 $\mu\text{m}$
Distância total ( $L_T$ )	800 km
Separação entre amplificadores ( $L_a$ )	20 km
Dispersão (D)	3 ps/nm/km
Atenuação ( $\alpha$ )	0.1 dB/km
Factor de emissão espontânea ( $n_{sp}$ )	0.0
Coefficiente não linear ( $\gamma$ )	3.7 $\text{W}^{-1}\cdot\text{km}^{-1}$

Tabela 5.2 - Parâmetros de um sistema de transmissão ideal a 10 Gbit/s.

Os amplificadores ópticos usados nesta simulação são ideais, ou seja amplificam o sinal sem adicionarem ruído de emissão espontânea, não se verificando por isso neste sistema ideal o efeito de Gordon-Haus.

A separação entre os amplificadores, 20 km, foi mantida muito menor que o comprimento de dispersão, 105 km, de modo a reduzir os campos dispersivos que poderiam perturbar a propagação da sequência de impulsos.

Foram propagados 1533 bits, gerados a partir de um sequência pseudo aleatória que contém todas as possíveis combinações de 9 bits, à excepção da sequência nula.

Para efeitos da simulação numérica o sinal foi amostrado a uma taxa de 128 amostras por símbolo, de modo a garantirmos uma medição rigorosa do *jitter*.

Na figura 5.6, podemos observar a boa concordância entre os resultados analíticos e os resultados da simulação, ou seja a posição das barras são precisamente as deduzidos anteriormente, e o seu peso relativo esta de acordo com a expressão (5.18).

Conseguimos assim por generalização do resultado de J. P. Gordon, que é aplicável ao problema da interacção entre dois solitões, obter um novo modelo analítico capaz de



descrever estatisticamente o tempo de chegada devido à interacção entre solitões, numa sequência infinita e aleatória de impulsos.

Com base neste novo modelo e com base no efeito de Gordon-Haus iremos derivar, na secção 5.4, um novo modelo capaz de descrever estatisticamente o *jitter* em sistemas baseados em solitões, considerando o efeito simultâneo do ruído de emissão espontânea e a interacção entre solitões.

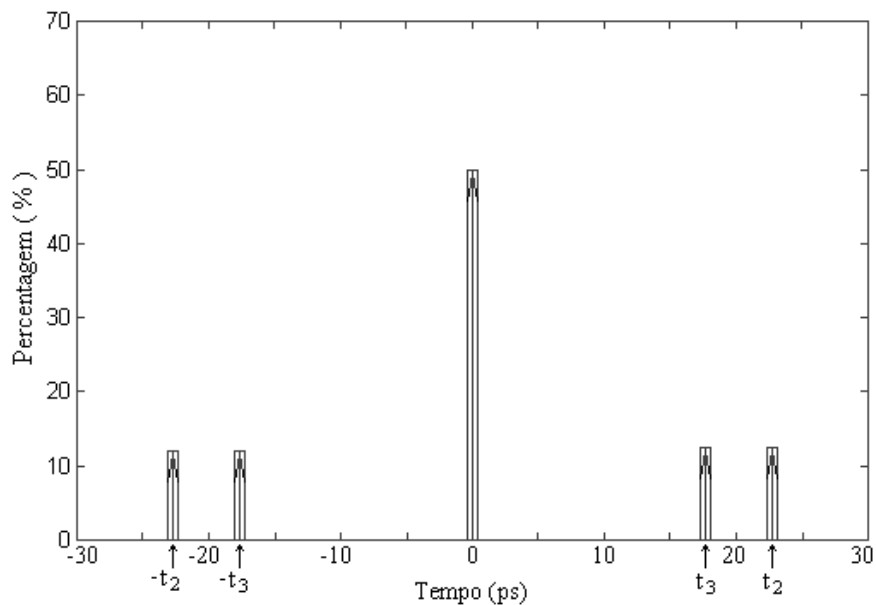


Figura 5.6 - Histograma das variações do tempo de chegada num sistema ideal a operar a 10 Gbit/s. As setas no interior das barras são as funções delta obtidas através da expressão (5.18),  $t_2$  e  $t_3$  foram obtidos com base nas expressões (5.19) e (5.20), respectivamente.

### 5.3.3 - Outras fontes de *jitter*

Embora o efeito de Gordon-Haus e a interacção entre solitões sejam, usualmente, os efeitos dominantes na introdução de *jitter* devido à transmissão não linear, para os sistemas considerados nesta tese, outros efeitos contribuem também para a incerteza do tempo de chegada. Destes salientam-se o *jitter* introduzido devido à PMD, aos campos acústicos, ao ruído de fase e *chirp* do laser, ao efeito de Raman, aos desvios temporais induzidos pelo ruído de emissão espontânea e ao coeficiente de dispersão de terceira ordem.

Como vimos no caso do efeito de Gordon-Haus, a robustez do solitão face a pequenas perturbações pode introduzir *jitter* no sistema. O mesmo acontece no caso da PMD. O solitão é relativamente robusto no que diz respeito à PMD [10], no entanto esta robustez faz com que o tempo de propagação do solitão seja dependente da sequência de estados de polarização assumidos pelo impulso. Como a polarização do solitão vai variar aleatoriamente durante a propagação e de impulso para impulso, quer devido à variação dos eixos de polarização da fibra quer devido ao ruído de emissão espontânea, vai por esta via ser introduzido *jitter* no sistema. O *jitter* introduzido no sistema devido ao efeito combinado da PMD e do ruído de emissão espontânea, foi caracterizado por L. Mollenauer e J. P. Gordon em [11], como sendo gaussiano com média nula e variância dada por

$$\sigma_{\text{pol}}^2 = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{(G-1)^2 \cdot n_{\text{sp}} \cdot h \cdot f_0}{G \cdot \ln(G) \cdot 2 \cdot P_0 \cdot T_0} \cdot \frac{D_{\text{PMD}}^2 \cdot L_T^2}{L_a} \quad (5.21)$$

Outro possível fenómeno responsável pela introdução de *jitter* é a geração de campos acústicos no interior do núcleo da fibra, que se vão propagar do interior para o exterior. Estes campos acústicos tem a sua origem na interacção do campo óptico com a matéria [12, 13, 14], e vão provocar pequenas variações na densidade do material em resposta a variações na intensidade do campo eléctrico. Como o índice de refração da sílica está relacionado com a densidade do material, a propagação destes campos origina pequenas variações no índice de refração que por sua vez alteram a velocidade de propagação dos impulsos. Temos então uma variação do índice de refração em função da intensidade do campo óptico, em tudo análoga ao efeito de Kerr. Porém no efeito de Kerr a variação induzida no índice de refração é praticamente instantânea e neste caso a variação do índice de refração ocorre numa escala de tempo próxima do tempo de propagação dos campos acústicos. Logo a modulação do índice de refração provocada por um impulso vai influenciar vários impulsos. Fazendo com que o tempo de propagação de um impulso seja dependente da sequência de impulsos que o precedeu. Este efeito foi observado experimentalmente pela primeira vez por K. Smith e L. Mollenauer em [15], e foi caracterizado em [16], através duma distribuição gaussiana com média nula e desvio padrão dado por

$$\sigma_{\text{acu}} = \frac{70}{1.76} \cdot A_{\text{eff}}^{-3/4} \cdot \frac{D^2}{T_0} \cdot L_T^2 \cdot \left( \frac{B_r}{1-r} - \frac{9.33}{A_{\text{eff}}^{1/2}} \right)^{1/2} \quad (5.22)$$

vindo expresso em picosegundos, quando a  $A_{\text{eff}}$  é expressa em micrometros ao quadrado,  $D$  em picosegundos por nanometros por quilometros,  $T_0$  em picosegundos,  $L_T$  em milhares de quilómetros e  $B_r$  em gigabits por segundo. O parâmetro  $r$  é o coeficiente de reflexão do campo acústico entre o núcleo e o revestimento, e no caso das fibras de sílica assume um valor próximo de 0.25.

Outra fonte de incerteza no tempo de propagação dos impulsos do tipo solitão, referida na literatura especializada, é o ruído de fase do emissor, nomeadamente quando este é baseado num laser semiconductor. O ruído de fase do laser faz com que a frequência central do emissor não permaneça fixa, levando a que sejam lançados impulsos para a fibra com diferentes frequências centrais. Conforme referimos anteriormente, ao analisarmos o efeito de Gordon-Haus, diferentes frequências centrais originam tempos de propagação diferentes, ou seja *jitter* temporal. No trabalho [17] é apresentado um extenso tratamento analítico deste problema, sendo apresentada a expressão seguinte, que permite relacionar o *jitter* temporal com a largura espectral do laser

$$\sigma_{\text{cl}}^2 = 0.0531 \cdot \frac{\lambda^4 \cdot D^2 \cdot \Delta S}{c^2 \cdot T_0} \cdot L_T^2 \quad (5.23)$$

em que  $\Delta S$  é a largura espectral do laser a funcionar em contínuo.

Conforme referimos no capítulo 4, a modulação directa dum laser semiconductor produz impulsos com *chirp*. No trabalho [18] é feito um estudo numérico sobre o *jitter* induzido pela modulação directa dum laser semiconductor, onde se mostra que o ruído do laser, induz um nível de incerteza na dinâmica da frequência central do laser, originada pela variação do ganho óptico da cavidade do laser, ou seja no *chirp*, de modo a que a frequência central dos solitões adquira um carácter aleatório, o que se traduz após a propagação na fibra em *jitter* temporal.

Outra possível fonte de introdução de *jitter* em sistemas baseados em solitões é o efeito de Raman. Atendendo às equações (2.75) e (3.12), o termo relativo ao efeito de Raman introduz uma perturbação na equação não linear de Schrödinger da forma

$$\varepsilon \cdot P(U) = \tau_R \cdot U \cdot \frac{\partial |U|^2}{\partial \tau} \quad (5.24)$$

em que

$$\tau_R = \frac{T_R}{T_0} \quad (5.25)$$

sendo  $T_R$  é o coeficiente relativo ao efeito de Raman introduzido na equação (2.75) e  $T_0$  é a largura do solitão. Seguindo um procedimento análogo ao efectuado por R. Essiambre e G. Agrawal no trabalho [19], podemos usar a teoria das perturbações adiabáticas para estudar o *jitter* devido ao efeito de Raman, para isso vamos substituir (5.24) em (3.13), (3.14), (3.15) e (3.16). Donde se obtém o seguinte conjunto de equações diferenciais

$$\frac{du_s}{d\xi} = \text{Im} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_R \cdot |U|^2 \cdot \frac{\partial |U|^2}{\partial \tau} d\tau \right\} = 0 \quad (5.26)$$

$$\frac{d\omega_s}{d\xi} = \text{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_R \cdot |U|^2 \cdot \frac{\partial |U|^2}{\partial \tau} \cdot \tanh(u_s \cdot (\tau - \tau_s)) d\tau \right\} = -\frac{8}{15} \cdot \tau_R \cdot u_s^4 \quad (5.27)$$

$$\frac{d\tau_s}{d\xi} = -\omega_s + \frac{1}{u_s} \cdot \text{Im} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_R \cdot |U|^2 \cdot \frac{\partial |U|^2}{\partial \tau} \cdot (\tau - \tau_s) d\tau \right\} = -\omega_s \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_s}{d\xi} &= \tau_s \cdot \frac{d\omega_s}{d\xi} + \frac{u_s^2 - \omega_s^2}{2} - \frac{1}{u_s} \cdot \text{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_R \cdot |U|^2 \cdot \frac{\partial |U|^2}{\partial \tau} \cdot (1 - u_s \cdot (\tau - \tau_s) \cdot \tanh(u_s \cdot (\tau - \tau_s))) d\tau \right\} \\ &= \tau_s \cdot \frac{d\omega_s}{d\xi} + \frac{u_s^2 - \omega_s^2}{2} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Notemos que os integrais presentes nas expressões (5.26) e (5.29) assumem o valor zero, pois a função  $|U|^2$  é par e  $\frac{\partial|U|^2}{\partial\tau}$ ,  $(\tau - \tau_s)$  e  $\tanh(u_s \cdot (\tau - \tau_s))$  são funções ímpares, em torno de  $\tau_s$ . O integral presente na expressão (5.27) pode ser calculado após alguma manipulação algébrica, tendo em consideração que  $\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sech}^4(x) \cdot \tanh^2(x) dx = \frac{4}{15}$ . O segundo termo do membro direito da expressão (5.28) é nulo porque a função a integrar é o resultado de um produto de funções reais, logo o resultado da integração é uma quantidade real, donde a parte imaginária é nula.

Resolvendo a equação (5.27) obtemos

$$\omega_s = -\frac{8}{15} \cdot \tau_R \cdot u_s^4 \cdot \xi + \omega_{s,0} \quad (5.30)$$

onde  $\omega_{s,0}$  é o desvio normalizado inicial da frequência angular central do solitão.

Substituindo (5.30) em (5.28) e resolvendo a equação (5.28) obtemos

$$\tau_s = \frac{4}{15} \cdot \tau_R \cdot u_s^4 \cdot \xi^2 - \omega_{s,0} \cdot \xi + \tau_{s,0} \quad (5.31)$$

onde  $\tau_{s,0}$  é o desvio normalizado inicial da posição temporal do solitão.

Atendendo ao ruído de emissão espontânea adicionado pelos amplificadores ópticos, a amplitude dos solitões vai variar aleatoriamente em torno de um dado valor, ver expressão (3.22), fazendo com que o desvio temporal induzido pelo efeito de Raman, expressão (5.31), também varie aleatoriamente em torno de um valor médio.

Supondo que a amplitude do solitão varia numa quantidade  $\delta u_s$  em cada um dos amplificadores ópticos do sistema, após  $N_a$  amplificadores a amplitude é dada por

$$u_{s,N_a} = u_{s,0} + \sum_{j=1}^{N_a} \delta u_{s,j} \quad (5.32)$$

onde  $u_{s,0}$  é a amplitude normalizada inicial do solitão.

Substituindo (5.32) em (5.30) temos que o desvio da frequência angular central normalizada do solitão num ponto do troço de fibra que se segue ao amplificador  $N_a$ , é dado por

$$\omega_{s,N_a} = -\frac{8}{15} \cdot \tau_R \cdot u_{s,0}^4 \cdot \xi - \frac{32}{15} \cdot \tau_R \cdot u_{s,0}^3 \cdot \xi \cdot \sum_{j=1}^{N_a} \delta u_{s,j} + \omega_{s,N_a-1} + \delta \omega_{s,N_a} \quad (5.33)$$

onde foram considerados apenas os termos lineares em  $\delta u_{s,j}$  e em que  $\xi$  é distância normalizada ao amplificador  $N_a$ . Substituímos  $\omega_{s,0}$  por  $\omega_{s,N_a-1}$ , sendo  $\omega_{s,N_a-1}$  o valor da frequência angular normalizada à entrada do amplificador  $N_a$ , o último termo  $\delta \omega_{s,N_a}$  foi incluído para quantificar o desvio de frequência induzido pelo ruído de emissão espontânea do amplificador  $N_a$ . Notemos que o desvio da frequência angular à entrada do amplificador  $N_a$  que aparece na expressão (5.33) como sendo  $\omega_{s,N_a-1}$ , deve ser calculado no final do troço correspondente ao amplificador  $N_a-1$ , ou seja em rigor deveríamos ter escrito  $\omega_{s,N_a-1}(L_a)$ , de modo a tornar explícita a sua dependência com a variável espacial, porém a notação simplificada irá facilitar a escrita do trabalho analítico que se segue, e feita esta referência não julgamos que tal seja origem de confusão.

Desenvolvendo recursivamente a expressão (5.33), obtemos

$$\begin{aligned} \omega_{s,N_a} = & -\frac{8}{15} \cdot \tau_R \cdot u_{s,0}^4 \cdot \xi - \frac{32}{15} \cdot \tau_R \cdot u_{s,0}^3 \cdot \xi \cdot \sum_{j=1}^{N_a} \delta u_{s,j} \\ & - \frac{8}{15} \cdot \tau_R \cdot \xi_a \cdot \sum_{j=1}^{N_a-1} u_{s,0}^4 - \frac{32}{15} \cdot \tau_R \cdot u_{s,0}^3 \cdot \xi_a \cdot \sum_{k=1}^{N_a-1} \sum_{j=1}^k \delta u_{s,j} + \sum_{j=1}^{N_a} \delta \omega_{s,j} \end{aligned} \quad (5.34)$$

Substituindo (5.34) em (5.31) e integrando, obtemos, após substituir  $\xi$  por  $\xi_a$ , o desvio temporal à entrada do receptor, em função do desvio temporal normalizado à entrada do último amplificador

$$\tau_{s,N_a} = \frac{8}{15} \cdot \tau_R \cdot \xi_a^2 \cdot \sum_{j=1}^{N_a} u_{s,0}^4 + \frac{32}{15} \cdot \tau_R \cdot u_{s,0}^3 \cdot \xi_a^2 \cdot \sum_{k=1}^{N_a} \sum_{j=1}^k \delta u_{s,j}$$

$$-\frac{4}{15} \cdot \tau_R \cdot \xi_a^2 \cdot u_{s,0}^4 - \frac{16}{15} \cdot \tau_R \cdot u_{s,0}^3 \cdot \xi_a^2 \cdot \sum_{k=j}^{N_a} \delta u_{s,j} - \xi_a \cdot \sum_{j=1}^{N_a} \delta \omega_{s,j} + \tau_{s,N_a-1} + \delta \tau_{s,N_a} \quad (5.35)$$

Notemos que os últimos dois termos da expressão (5.35) dizem respeito ao desvio temporal à entrada do último amplificador e ao desvio temporal induzido pelo último amplificador, respectivamente.

Desenvolvendo recursivamente a expressão (5.35) obtemos

$$\begin{aligned} \tau_{s,N_a} &= \frac{8}{15} \cdot \tau_R \cdot \xi_a^2 \cdot \sum_{k=1}^{N_a} \sum_{j=1}^k u_{s,0}^4 - \frac{4}{15} \cdot \tau_R \cdot \xi_a^2 \cdot \sum_{j=1}^{N_a} u_{s,0}^4 \\ &+ \frac{32}{15} \cdot \tau_R \cdot u_{s,0}^3 \cdot \xi_a^2 \cdot \sum_{m=1}^{N_a} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^k \delta u_{s,j} - \frac{16}{15} \cdot \tau_R \cdot u_{s,0}^3 \cdot \xi_a^2 \cdot \sum_{k=1}^{N_a} \sum_{j=1}^k \delta u_{s,j} \\ &- \xi_a \cdot \sum_{k=1}^{N_a} \sum_{j=1}^k \delta \omega_{s,j} + \sum_{j=1}^{N_a} \delta \tau_{s,j} \end{aligned} \quad (5.36)$$

Notemos que os dois primeiros termos da expressão (5.36) correspondem a um desvio temporal fixo, igual para todos os impulsos, o terceiro e o quarto termo dão origem ao *jitter* devido ao efeito de Raman, o quinto termo dá origem ao efeito de Gordon-Haus, ver expressão (5.3), e o último termo resulta da soma dos diferentes desvios temporais introduzidos pelos vários amplificadores.

A partir de (5.36) podemos obter a variância do *jitter*, calculando a esperança do desvio temporal ao quadrado e subtraindo o quadrado do desvio temporal médio. Para isso vamos começar por agrupar as duas primeiras parcelas, que são responsáveis pelo desvio de Raman, e a terceira e a quarta, que são responsáveis pelo *jitter* de Raman. Assumindo que os desvios na posição temporal, na amplitude e frequência induzidos pelos vários amplificadores são estatisticamente independentes e que a sua esperança é nula podemos desprezar os termos cruzados, resultantes do cálculo do quadrado do desvio temporal, assim como o termo originado pelo quadrado dos termos devidos ao desvio de Raman, pois correspondem ao valor do desvio médio ao quadrado. Podemos assim calcular separadamente a contribuição resultante dos desvios de frequência, amplitude e posição

temporal induzidos pelo ruído de emissão espontânea adicionado pelos vários amplificadores ópticos.

O *jitter* devido aos desvios aleatórios de frequência foi calculado na secção 5.3.1 e corresponde ao efeito de Gordon-Haus, ver expressão (5.6). O *jitter* originado pelos desvios temporais é dado por

$$\sigma_{\tau, \delta\tau}^2 = E \left\{ \left( \sum_{j=1}^{N_a} \delta\tau_{s,j} \right)^2 \right\} = N_a \cdot \sigma_{\tau_s}^2 \quad (5.37)$$

em que  $\sigma_{\tau_s}^2$  é dada por (3.24).

A variância do *jitter* originado pelas variações aleatórias da amplitude, que são a origem do *jitter* devido ao efeito de Raman, pode ser obtida, calculando a esperança do quadrado do terceiro e quarto termo da expressão (5.36), ver apêndice D, obtendo-se

$$\sigma_{R, \delta\tau}^2 = \left( \frac{16}{15} \right)^2 \cdot \tau_R^2 \cdot u_{s,0}^6 \cdot \xi_a^4 \cdot \left\{ \frac{N_a^5}{5} + \frac{N_a^4}{2} - N_a^2 - N_a \right\} \cdot \sigma_{u_s}^2 \quad (5.38)$$

em que  $\sigma_{R, \delta\tau}^2$  é a variância normalizada do *jitter* devido ao efeito de Raman e  $\sigma_{u_s}^2$  é dada por (3.22).

Seguindo um procedimento análogo ao efectuado para o efeito de Raman, é possível verificar igualmente que o coeficiente de dispersão de terceira ordem converte as flutuações aleatórias na amplitude dos impulsos, induzidas pelo ruído de emissão espontânea, em *jitter* temporal. Neste caso, e tendo em consideração a equação (2.75), o termo relativo à perturbação é

$$\varepsilon \cdot P(U) = i \cdot \delta_d \cdot \frac{\partial^3 U}{\partial \tau^3} \quad (5.39)$$

em que

$$\delta_d = \frac{\beta_3}{6 \cdot |\beta_2| \cdot T_0} \quad (5.40)$$

Donde se obtém [19]



$$\sigma_{\text{TOD},\delta\tau}^2 = \frac{4}{3} \cdot \delta_d^2 \cdot u_{s,0}^2 \cdot \xi_a^2 \cdot N_a^3 \cdot \sigma_{u_s}^2 \quad (5.41)$$

em que  $\sigma_{\text{TOD},\delta\tau}^2$  é a variância normalizada do *jitter* devido ao coeficiente de dispersão de terceira ordem e  $\sigma_{u_s}^2$  é dada por (3.22).

Devemos ter ainda em consideração que se considerarmos a contribuição simultânea da dispersão de terceira ordem e do efeito de Raman irão aparecer termos cruzados. Porém, usualmente, estes termos são pouco significativos pois são proporcionais ao produto  $\delta_d \cdot \tau_R$ . No entanto, conforme foi realizado no trabalho [19] é possível considerar as várias perturbações a actuarem simultaneamente e assim obter uma descrição mais rigorosa do problema.

Um aspecto interessante, relativamente ao estudo do *jitter* temporal é analisar a sua importância relativa. Para sistemas de média e longa dimensão o *jitter* devido às variações aleatórias da frequência, amplitude e posição temporal dos solitões, induzidas pelo ruído de emissão espontânea, assume, usualmente, um papel dominante, relativamente ao *jitter* devido à PMD, aos campos acústicos e ao ruído de fase e *chirp* do laser emissor. No entanto permanece a questão de saber qual das três flutuações, frequência, amplitude ou posição temporal é mais relevante. Notemos que o ruído de emissão espontânea induz igualmente uma variação aleatória na fase dos solitões, que do ponto de vista de estudo do *jitter* de impulsos isolados é irrelevante.

Observando as expressões (5.6), efeito de Gordon-Haus, (5.37), *jitter* devido às flutuações na posição temporal, (5.38), *jitter* devido ao termo de Raman, (5.41), *jitter* devido à dispersão de terceira ordem, podemos prever que o *jitter* devido às flutuações na posição temporal seja pouco relevante para sistemas de média e longa distância, atendendo ao aumento apenas linear com o número de amplificadores,  $N_a$ . Notemos que o efeito de Gordon-Haus e o *jitter* devido à dispersão de terceira ordem aumentam proporcionalmente a  $N_a^3$  e o *jitter* devido ao termo de Raman aumenta proporcionalmente a  $N_a^5$ .

Ao compararmos a importância relativa dos desvios aleatórios na frequência, efeito de Gordon-Haus, com os desvios aleatórios na amplitude, *jitter* devido ao efeito de Raman

e à dispersão de terceira ordem, devemos ter em consideração a ordem de grandeza dos diferentes coeficientes. O termo de Raman,  $T_R$ , assume usualmente um valor entre 2-10 fs e o coeficiente de dispersão de terceira ordem,  $\beta_3$ , um valor inferior a  $0.2 \text{ ps}^3/\text{km}$ , o que faz com que o efeito de Raman e a dispersão de terceira ordem só assumam um papel relevante, em termos de *jitter*, para sistemas com larguras temporais dos impulsos inferiores a 3 ps [19]. Para o caso de sistemas usando impulsos desta ordem de grandeza ou inferiores, ou seja inferiores a poucos picosegundos, o *jitter* devido aos desvios aleatórios na amplitude dos solitões pode assumir um carácter dominante [19]. No entanto e de acordo com aquilo que foi dito anteriormente, para os sistemas em estudo nesta tese, sistemas com larguras dos impulsos superiores a alguns picosegundos, tipicamente superiores a 10 ps, e distâncias inferiores a 10 000 km, o efeito de Gordon-Haus é usualmente o efeito dominante, quando consideramos impulsos isolados. Ao considerarmos sequências aleatórias de impulsos, conforme iremos ver na secção seguinte a interacção entre solitões assume igualmente um papel relevante.

## 5.4 - Novo modelo para o *jitter*

Nesta secção iremos derivar um novo modelo para o *jitter*, capaz de caracterizar a incerteza do tempo de chegada em sistemas baseados em solitões, tendo em consideração a acção simultânea do efeito de Gordon-Haus e da interacção entre solitões.

Começaremos por mostrar, na secção 5.4.1, com o recurso à simulação, que o modelo de Gordon-Haus não é adequado para descrever a distribuição do *jitter* em sistemas a operarem a elevados ritmos de transmissão. De facto, como será visível nos resultados numéricos, a distribuição do *jitter* apresenta desvios substanciais relativamente à distribuição gaussiana, que não são explicados pelo modelo de Gordon-Haus. Estes resultados estão em concordância com relatos de diversos ensaios experimentais, onde a medição do *jitter* revelou desvios substanciais relativamente à distribuição gaussiana [20].

Tendo por base o modelo apresentado na secção 5.3.2, que descreve a interacção entre solitões numa sequência aleatória e infinita de impulsos, e considerando o ruído como

sendo uma pequena perturbação, iremos, na secção 5.4.2, obter um novo modelo para o *jitter*, que inclui o efeito de Gordon-Haus no modelo anteriormente derivado.

Finalmente, iremos apresentar, na secção 5.4.3, diversos resultados que mostram que o novo modelo para o *jitter*, não gaussiano, descreve melhor a função densidade de probabilidade do tempo de chegada, que o modelo gaussiano até agora disponível. Nomeadamente, as caudas da função densidade de probabilidade, que como veremos nos capítulos 6 e 7 são determinantes no cálculo da taxa de erro (BER - *Bit Error Rate*) dos sistemas de transmissão, são melhor aproximadas com este novo modelo.

#### 5.4.1 - Desvios relativamente ao modelo de Gordon-Haus

Em sistemas a operarem a elevados ritmos de transmissão os impulsos são lançados próximos uns dos outros, originando consideráveis forças de interacção entre eles. As perturbações na propagação de um solitão originadas pela presença de solitões vizinhos, que analisámos anteriormente numa situação ideal, ou seja sem o efeito do ruído de emissão espontânea, podem originar desvios substanciais relativamente à distribuição gaussiana [21, 22].

Este facto pode ser comprovado através da simulação numérica. Para isso considerámos um sistema a operar a 20 Gbit/s, cujos parâmetros são apresentados na tabela 5.3. Medimos o desvio do tempo de chegada dos diferentes impulsos, relativamente ao tempo de chegada correspondente à velocidade de grupo, e obtivemos os resultados apresentados na figura 5.7.

Ritmo de transmissão ( $B_T$ )	20 Gbit/s
Largura dos impulsos ( $T_0$ )	10.0 ps
Comprimento de onda ( $\lambda$ )	1.55 $\mu\text{m}$
Distância total ( $L_T$ )	3 000 km
Separação entre amplificadores ( $L_a$ )	20 km
Dispersão ( $D$ )	0.1 ps/nm/km
Atenuação ( $\alpha$ )	0.1 dB/km
Factor de emissão espontânea ( $n_{sp}$ )	2.0
Coefficiente não linear ( $\gamma$ )	3.7 $\text{W}^{-1}\cdot\text{km}^{-1}$

Tabela 5.3 - Parâmetros de um sistema de transmissão a 20 Gbit/s.

Na figura 5.7 mostramos igualmente a função densidade de probabilidade prevista pelo modelo de Gordon-Haus em que a variância foi obtida usando a expressão (5.7).

Na figura 5.7 podemos ver claramente o desvio em relação ao modelo de Gordon-Haus devido à interação entre solitões. A função densidade de probabilidade é substancialmente mais larga que a distribuição prevista pelo modelo de Gordon-Haus, devemos por isso esperar uma forte degradação das performances do sistema devido à interação entre solitões.

Notemos que na simulação deste sistema não foram considerados os efeitos da birrefringência, dos campos acústicos, de Raman, nem a dispersão de terceira ordem. Para além disso os campos dispersivos foram mantidos a um nível muito reduzido e foi considerado um emissor ideal. Ou seja, os únicos dois efeitos relevantes para o *jitter* são o ruído de emissão espontânea e a interação entre solitões.

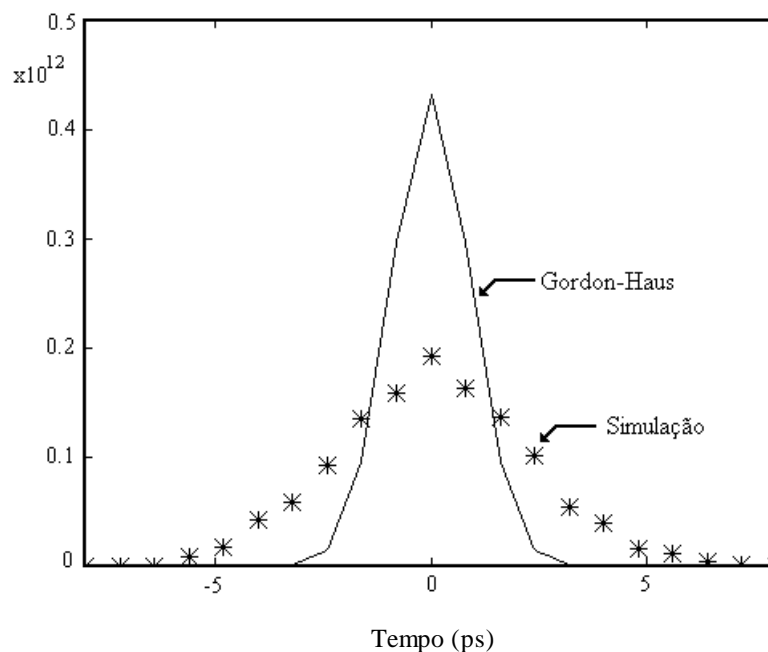


Figura 5.7 - Função densidade de probabilidade do tempo de chegada para um sistema a 20 Gbit/s. A linha cheia é o resultado de Gordon-Haus e as estrelas são o resultado obtido através da simulação numérica.

Atendendo a que o *jitter* devido aos desvios temporais, induzidos pelo ruído de emissão espontânea, é reduzido, quando comparado com o *jitter* devido ao efeito de

Gordon-Haus, ver expressões (5.37) e (5.6), podemos concluir que os desvios relativamente ao modelo de Gordon-Haus se ficam a dever à interacção entre solitões.

Na secção seguinte iremos procurar derivar um novo modelo capaz de descrever a distribuição do tempo de chegada em sistemas baseados em solitões, tendo em consideração a acção simultânea do efeito de Gordon-Haus e da interacção entre solitões.

#### **5.4.2 - Efeito de Gordon-Haus e a interacção entre solitões**

A simulação para determinação da distribuição do tempo de chegada em sistemas de transmissão não lineares é, normalmente, muito demorada, devido às exigências computacionais impostas pelas técnicas numéricas de resolução de equações diferenciais não lineares. Sendo assim o modelo aqui desenvolvido pode ser bastante útil, no projecto e análise de sistemas baseados em solitões. Permitindo o tratamento de problemas, para os quais a simulação numérica tem dificuldade em dar uma resposta em tempo útil [23].

A derivação do novo modelo é baseada no pressuposto de que a intensidade do campo eléctrico resultante do ruído de emissão espontânea, é muito menor que a intensidade do campo correspondente ao sinal óptico que se pretende transmitir. Notemos que em sistemas de transmissão baseados em solitões, onde os níveis de potência óptica de sinal envolvidos são relativamente elevados, esta condição é facilmente verificada.

Partindo deste pressuposto podemos tratar o efeito do ruído como uma pequena perturbação ao sistema ideal. Esperamos assim obter uma função densidade de probabilidade relacionada com a expressão (5.18), que é a distribuição do tempo de chegada num sistema ideal, ou seja incluindo apenas o efeito da interacção entre solitões e desprezando o ruído de emissão espontânea.

No entanto devido ao efeito do ruído é de esperar que não obtenhamos as funções delta da expressão (5.18). Em vez das funções delta devemos obter um conjunto de distribuições mais largas devido ao efeito de Gordon-Haus.

Atendendo a que a distribuição do *jitter*, devido ao efeito de Gordon-Haus, pode ser caracterizada por uma distribuição gaussiana, é de esperar que uma distribuição do

*jitter* baseada em cinco funções gaussianas, com o centro de cada uma delas coincidente com as funções delta do sistema ideal, e variância dada por (5.7), possa aproximar razoavelmente bem a função densidade de probabilidade do *jitter* para sistemas a operarem a elevados ritmos de transmissão. Teremos assim uma função densidade de probabilidade dada por [24]

$$p(t) = \frac{1}{2} \cdot f_g(t, \sigma_{GH}) + \frac{1}{8} \cdot f_g(t - t_2, \sigma_{GH}) + \frac{1}{8} \cdot f_g(t + t_2, \sigma_{GH}) + \frac{1}{8} \cdot f_g(t - t_3, \sigma_{GH}) + \frac{1}{8} \cdot f_g(t + t_3, \sigma_{GH}) \quad (5.42)$$

onde  $f_g(t, \sigma_{GH})$  é dada por

$$f_g(t, \sigma_{GH}) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma_{GH}^2}} \exp\left[-\frac{t^2}{2 \cdot \sigma_{GH}^2}\right] \quad (5.43)$$

os valores de  $t_2$  e  $t_3$  são dadas por (5.19) e (5.20) respectivamente, e  $\sigma_{GH}^2$  é dado por (5.7).

### 5.4.3- Comparação entre o novo modelo e resultados da simulação

A derivação do modelo apresentado na secção anterior foi efectuada com base num conjunto de pressupostos que carecem de melhor confirmação. De modo a validarmos o modelo apresentado vamos compara-lo com os resultados da simulação de diferentes sistemas.

Desde logo vamos aplica-lo ao sistema anteriormente simulado a 20 Gbit/s. Conforme podemos verificar na figura 5.8 a concordância entre o novo modelo e os resultados da simulação é bastante boa. Pode concluir-se então que a interacção entre solitões assume neste sistema um papel relevante e que uma estimativa do BER do sistema com base no novo modelo, não gaussiano, dará uma melhor aproximação do desempenho do sistema do que uma estimativa usando o modelo gaussiano.

Notemos como as caudas da função densidade de probabilidade são muito melhor aproximadas pelo novo modelo não gaussiano.

Devemos ter ainda em consideração que nos casos em que a interação entre solitões é pouco relevante o novo modelo degenera no modelo de Gordon-Haus.

Notemos que dizer que a interação entre solitões não é relevante significa dizer que  $t_2$  e  $t_3$  na expressão (5.42), assumem valores próximos de zero. No caso em que  $t_2$  e  $t_3$  assumem o valor zero, é imediato que o novo modelo coincide com o modelo de Gordon-Haus.

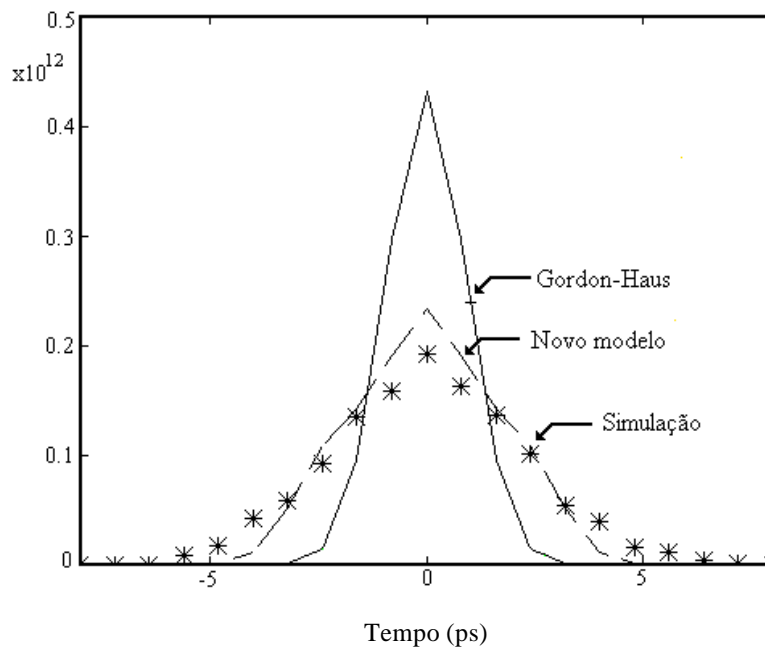


Figura 5.8 - Função densidade de probabilidade de um sistema a 20 Gbit/s. A linha a cheio é o resultado de Gordon-Haus, as estrelas são o resultados da simulação e a linha tracejada é o novo modelo.

De modo a validarmos os resultados do novo modelo, para diferentes ritmos de transmissão, vamos aplica-lo a dois sistemas.

Um a operar a 10 Gbit/s e outro a 40 Gbit/s, cujos parâmetros são apresentados, respectivamente, nas tabelas 5.4 (a) e (b).

Estes são os ritmos de transmissão, por comprimento de onda, da nova geração de sistemas ópticos de elevada capacidade. Os resultados são apresentados na figura 5.9,

onde podemos observar novamente uma boa concordância entre o novo modelo e os resultados da simulação.

Ritmo de transmissão ( $B_r$ )	10 Gbit/s
Largura dos impulsos ( $T_0$ )	20.0 ps
Comprimento de onda ( $\lambda$ )	1.55 $\mu\text{m}$
Distância total ( $L_T$ )	5 000 km
Separação entre amplificadores ( $L_a$ )	20 km
Dispersão (D)	0.2 ps/nm/km
Atenuação ( $\alpha$ )	0.1 dB/km
Factor de emissão espontânea ( $n_{sp}$ )	2.0
Coeficiente não linear ( $\gamma$ )	3.7 $\text{W}^{-1}\cdot\text{km}^{-1}$

(a)

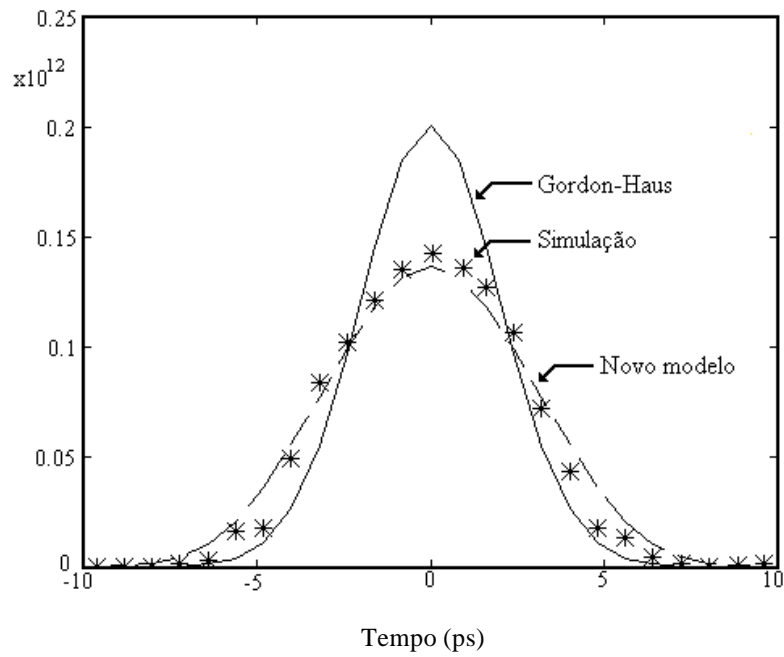
Ritmo de transmissão ( $B_r$ )	40 Gbit/s
Largura dos impulsos ( $T_0$ )	3.4 ps
Comprimento de onda ( $\lambda$ )	1.55 $\mu\text{m}$
Distância total ( $L_T$ )	2 000 km
Separação entre amplificadores ( $L_a$ )	20 km
Dispersão (D)	0.1 ps/nm/km
Atenuação ( $\alpha$ )	0.1 dB/km
Factor de emissão espontânea ( $n_{sp}$ )	2.0
Coeficiente não linear ( $\gamma$ )	3.7 $\text{W}^{-1}\cdot\text{km}^{-1}$

(b)

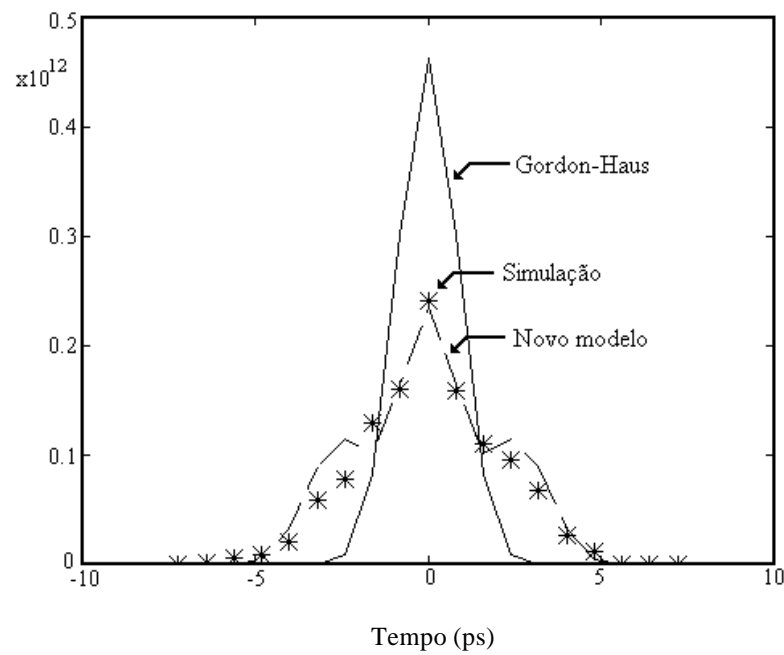
Tabela 5.4 - Parâmetros de dois sistemas de transmissão. Um a 10 Gbit/s (a) e outro a 40 Gbit/s (b).

Na figura 5.9, podemos observar que os desvios relativamente à distribuição gaussiana, ou seja ao modelo de Gordon-Haus, aumentam com o ritmo de transmissão. O que vem confirmar a afirmação anterior sobre o papel relevante da interacção entre solitões em sistemas de muito elevado ritmo de transmissão.





(a)



(b)

Figura 5.9 - Função densidade de probabilidade para um sistema a 10 Gbit/s (a), e para outro a 40 Gbit/s (b). As linhas a cheio são o resultado de Gordon-Haus, as estrelas são o resultado da simulação numérica e a linha a tracejado é o novo modelo.

## 5.5- Conclusões

Nesta secção foi analisado o problema do *jitter* em sistemas de transmissão. Particular relevo foi dado ao estudo do *jitter* proveniente da transmissão não linear.

Mostrámos que a interacção entre solitões produz consideráveis desvios relativamente ao modelo de Gordon-Haus.

Derivámos um novo modelo analítico, para a função densidade de probabilidade do tempo de chegada, em sistemas baseados em solitões, que tem em consideração o efeito de Gordon-Haus e a interacção entre solitões.

Resultados da simulação mostraram uma boa concordância entre o novo modelo e a distribuição do *jitter* medido.

## References

- [1] Patrick R. Trischitta, Eve L. Varma, *Jitter in Digital Transmission Systems*, Artech House, Norwood, EUA., 1989.
- [2] Luís Filipe Botelho Ribeiro, *Sistemas de Comunicação com Amplificação Óptica*, Tese de Doutoramento, Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal, 1995.
- [3] Alan McGuire, Paul Bonenfant, *Standards: the blueprints for optical networking*, IEEE Communications, vol. 36, n. 2, 1998.
- [4] J. P. Gordon, and H. A. Haus, Random walk of coherently amplified solitons in optical fiber transmission, *Optics Letters*, vol. 11, n. 10, pp. 665-667, 1986.
- [5] V. I. Karpman, and V. V. Solov'ev, A perturbational approach to the two-soliton systems, *Physica 3D*, pp. 487-502, 1981.
- [6] J. P. Gordon, Interaction forces among solitons in optical fibers, *Optics Letters*, vol. 8, n. 11, pp. 596-598, 1983.
- [7] T. Georges, *Perturbation Theory for the Assessment of Soliton Transmission Control*, Optical Fiber Technology, vol 1, pp 97-116, 1995.
- [8] M. C. Jeruchim, P. Balaban, and K. S. Shanmugan, *Simulation of Communication Systems*, Plenum Press, Nova Iorque, EUA, 1992.
- [9] A. Nolasco Pinto, Govind P. Agrawal, J. Ferreira da Rocha, Analytical and numerical study of timing jitter in soliton communication systems, *OSA'96*, Rochester, EUA, 1996.
- [10] L. F. Mollenauer, K. Smith, J. P. Gordon, and C. R. Menyuk, Resistance of solitons to the effects of polarization dispersion in optical fibers, *Optics Letters*, vol. 14, pp. 1219-1221, 1989.
- [11] L. F. Mollenauer, J. P. Gordon, Birefringence-mediated timing jitter in soliton transmission, *Optics Letters*, vol. 19, pp. 375-377, 1994.
- [12] E. M. Dianov, A. V. Luchnikov, A. N. Pilipetskii and A. M. Prokhorov, Electrostriction mechanism of soliton interaction in optical fibers, *Optics Letters*, vol. 15, pp. 314-316, 1990.
- [13] E. M. Dianov, A. V. Luchnikov, A. N. Pilipetskii and A. M. Prokhorov, Long-range interaction of solitons in ultra-long communication systems, *Sov. Lightwave Commun.*, vol. 1, pp. 235-246, 1991.
- [14] E. M. Dianov, A. V. Luchnikov, A. N. Pilipetskii and A. M. Prokhorov, Long-range interaction of picosecond solitons through excitation of acoustic waves in optical fibers, *Appl. Phys. B*, vol. 54, pp 175-180, 1992.
- [15] K. Smith, and L. F. Mollenauer, Experimental observation of soliton interaction over long fiber paths: discovery of a long-range interaction, *Optics Letters*, vol. 14, pp 1284-1286, 1989.
- [16] L. F. Mollenauer, P. V. Mamyshev, and M. J. Neybelt, Measurement of timing jitter in soliton transmission at 10 Gbit/s and achievement of 375 Gbit/s-Mm, error-free, at 12.5 and 15 Gbit/s, *Optics Letters*, vol. 19, pp 704-706, 1994.
- [17] Katsumi Iwatsuki, Shingo Kawai, Shigendo Nishi, and Masatoshi Saruwatari, Timing jitter due to carrier linewidth of laser-diode pulse sources in ultra-high speed soliton transmission, *Journal of Lightwave Technology*, vol. 13, n. 4, pp 639-649, 1995.

- [18] Claudio R. Mirasso, Luis Pesquera, and Antonio Mecozzi, Pulse-to-pulse frequency jitter in diode lasers and soliton transmission, *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 5, n. 12, pp 1455-1458, 1993.
- [19]- R-J. Essiambre e G. P. Agrawal, Timing jitter of ultrashort solitons in high-speed communication systems. I. General formulation and application to dispersion-decreasing fibers, *J. opt. Soc. Am. B*, vol. 14, n. 2, pp. 314-322, 1997.
- [20]- L.F. Mollenauer, P.V. Mamyshev, and M.J. Neubelt, Measurement of timing jitter in filter-guided soliton transmission at 10 Gbits/s and achievement of 375 Gbits/s-Mm, error free, at 12.5 and 15 Gbits/s, *Optics Letters*, vol. 19, n. 10, pp. 704-706, 1994.
- [21] C. R. Menyuk, Non-Gaussian corrections to the Gordon-Haus distribution resulting from soliton interactions, *Optics Letters*, vol. 20, n. 3, pp. 285-287, 1995.
- [22] T. Georges, Bit error rate degradation of interacting solitons owing to non-Gaussian statistics, *Electronics Letters*, vol. 31, n. 14, pp. 1174-1175, 1995.
- [23] J. R. F. da Rocha, L. B. Ribeiro e A. N. Pinto, Semi-analytical method for performance analysis of soliton systems, *CLEO / Pacific Rim'95*, Chiba, Japan, pp. 43-44, 1995.
- [24] A. Nolasco Pinto, Govind P. Agrawal e J. Ferreira da Rocha, Effect of soliton interaction on timing jitter in communication systems, *Journal of Lightwave Technology*, vol. 16, n. 4, pp. 515-519, 1998.